追加練習問題

第１講　１の n 乗根

n を自然数として z の $2n$ 次方程式

$$z^{2n}+z^{2n-1}+\cdots+z+1=0$$

の異なる実数解の個数を求めよ.

第２講　点を回転する

平面上で，異なる 2 つの直線 l と直線 m が原点で交わっている．α を原点以外の直線 l 上の点，β を原点以外の直線 m 上の点とする．
この 2 直線上にない点 P を考え，点 P を直線 l に関して対称移動した点を Q，更に点 Q を直線 m に関して対称移動した点を R としたとき，点 P を原点を中心に θ だけ回転したものが点 R になることを示し，θ を α と β を用いて表せ．

第３講　複素数と円

p を実数として，複素数平面上の点 a_1，a_2，…，a_n を

$$\begin{cases} a_1=i,\ a_2=1 \\ a_{n+2}+pa_{n+1}-a_n=0\ (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

により定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく．ただし，i は虚数単位とする．

$n=1$，2，… のとき，b_n は中心 $-\dfrac{p}{2}$，半径 $r(>0)$ の円周上にあることを示し，半径 r を求めよ．

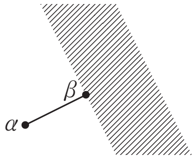
第４講　複素数と領域

α と β は相異なる複素数として

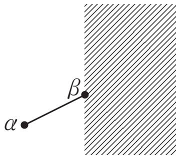
$$1 \leqq \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} \leqq 2$$

を満たすとき z が動く部分の領域を選べ.

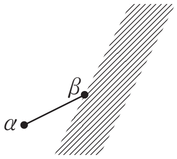
(A)



(B)



(C)



第5講　媒介変数で表された曲線

$x=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$, $y=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ で定められる曲線の $y\geqq 0$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

第６講　２次曲線と極座標

a を正の定数とする．極方程式 $r=\dfrac{1}{a-\cos\theta}$ で与えられた曲線が放物線を表すような定数 a を求めよ．

第７講　よくある極限

次の極限を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x\cos x}{x^3}$$

第８講　挟んで極限

n を 2 以上の自然数として，a を $0<a<1$ を満たす定数とする．x の方程式 $x^n+ax-1=0$ は正の実数解をひとつだけもつことを示し，その実数解を x_n とするとき，$\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

第9講　ちょっと難あり極限

曲線 $C: y=\log x$ と直線 $l: y=ax+b$ が2点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ で交わっている．ただし，$\mathrm{PQ}=1$，$x_1<x_2$ である．
このとき $\displaystyle\lim_{a\to\infty} a^2({x_2}^2-{x_1}^2)$ と $\displaystyle\lim_{a\to+0} a({x_2}^2-{x_1}^2)$ をそれぞれ求めよ．

第10講　一般項を求めないで極限

$a_1=\dfrac{3}{2}$，$a_{n+1}=3\log_4(a_n+1)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ に関して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

第 11 講　無限級数

正の数からなる数列 $\{a_n\}$ が，条件

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2=n^3$$

を満たしている.

このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^2}$ を求めよ.

第12講　微分について

連続な導関数をもつ関数 $f(x)$ について，任意の実数 x，y に対して
$f(x+y)=f(x)+f(y)$，$f'(x)\fallingdotseq 0$ を満たすとする．

(1)　$f(0)$ を求めよ．

(2)　$\dfrac{f'(x)}{f'(0)}$ を求めよ．

(3)　$f'(0)=2$ として $f(x)$ を求めよ．

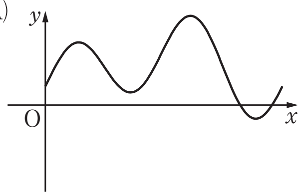
第 13 講　接線といえば

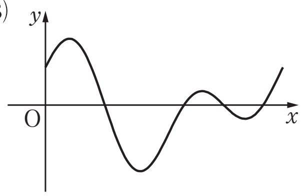
$f(x)=x^2-5$ とする.

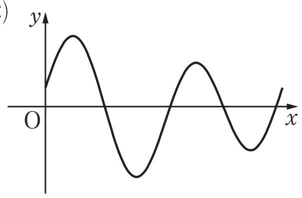
$a_1=3$, $a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ を考えて $\sqrt{5}$ の小数第 2 位を求めよ.

第 14 講　グラフを描く

$y=\cos x+3\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ のグラフを以下から選べ.

(A)


(B)


(C)


第 15 講　ちょっと訳あり増減

C_1：$y=e^{x-1}$ $(x \geqq 0)$ 上の点を P，C_2：$y=-x^2+5x-6$ 上の点を Q とするとき，PQ の最小値を求めよ．

第 16 講　微分でやっておきたいこと

$x>0$ のとき

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

であることを示し，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{b^2\log(b+a)-b^2\log b-ab}{a^2}$ の値を求めよ．ただし，b は正の定数とする．

第17講　落とせない積分計算

次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \cos^3 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^4 x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx$

第 18 講　積分と漸化式

n を自然数として，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx,\quad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx,\quad K_n=\int_1^{e}(\log x)^n\,dx,\quad L_n=\int_0^{1}x^n e^x\,dx$$

とする．

$$I_n=\alpha J_n,\quad K_n=\beta L_n$$

がすべての n について成立するとき，実数 α と β の値を求めよ．

また I_3+K_3 の値を求めよ．

第19講　実数解条件と体積

a を0以上の実数として，xy 座標平面上の領域

$$x^2+(y-a)^2\leqq 1 \text{ かつ } y\geqq 0$$

D を考える．ただし，a は0以上の実数とする．

D を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(a)$ とする．

$V(a)=2\pi^2$ となる a の値を求めよ．

第 20 講　斜回転体の体積

$C: y=\sin x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi\right)$ と $l: y=\dfrac{3}{5\pi}x$ によって囲まれる部分を D とする.

D を直線 l のまわりに回転して得られる立体の体積 V を求めよ.

第21講　体積は切る！

K_1：$x \geqq 0$ かつ $z \geqq 0$ かつ $2x+3z \leqq 6$，K_2：$y \geqq 0$ かつ $z \geqq 0$ かつ $3y+4z \leqq 12$ とする．
K_1 と K_2 の共通部分の体積 V を求めよ．

第22講　微分方程式

任意の実数 x に対して

$$f(x)=\sin 2x+\int_0^x f(x-u)\sin u\,du$$

を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ.

第 23 講　積分でやっておきたいこと（その 1）

以下の空欄に適切な数値や記号を入れよ．

n を 0 以上の自然数として，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)^n\cos x\,dx$ とするとき，$I_0=$ **あ** ，$I_1=$ **い** であり，$I_{n+1}=2(2n+$ **う** $)(n+$ **え** $)I_n-n(n+$ **お** $)\pi^2 I_{n-1}$ を満たす．

このとき π が有理数 $\frac{p}{q}$ (p，q は自然数で互いに素) であると仮定して $J_n=\frac{q^n}{n!}I_n$ とおくとき，矛盾が生じる理由として最も適切なものを以下の 3 つから選ぶと **か** である．

(A)　J_n は自然数であるが，$\lim_{n\to\infty}J_n=1$ となること．

(B)　J_n は自然数であるが，$\lim_{n\to\infty}J_n=\infty$ となること．

(C)　J_n は自然数であるが，$\lim_{n\to\infty}J_n=0$ となること．

第 24 講　積分でやっておきたいこと（その 2）

実数 t が $1<t<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，

関数 $f(t)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|x-t\sin x|\,dx$ の最小値を求めよ．

追加練習問題解答

第１講　1のn乗根

n を自然数として z の $2n$ 次方程式

$$z^{2n}+z^{2n-1}+\cdots+z+1=0$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

【答】 0

【解説】 方程式 $z^{2n+1}=1$ を考える．

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

$z^{2n+1}=r^{2n+1}\{\cos(2n+1)\theta+i\sin(2n+1)\theta\}$ で $1=1(\cos0+i\sin0)$ なので

$0\leqq(2n+1)\theta<2(2n+1)\pi$ に注意すると

$$r^{2n+1}=1 \text{ かつ } (2n+1)\theta=2k\pi \ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$$

$$\Longleftrightarrow\quad r=1 \text{ かつ } \theta=\frac{2k}{2n+1}\pi \ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$$

となる．このとき z が実数となる条件は $\theta=l\pi$ (l は整数)となるときであるが，

$\dfrac{2k}{2n+1}\pi=l\pi \Longleftrightarrow 2k=l(2n+1)$ であることと $k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n$ より $k=0$ に決まる．

よって $z^{2n+1}=1$ の実数解は $z=1$ だけとなる．

ここで $z^{2n+1}-1=(z-1)(z^{2n}+z^{2n-1}+\cdots+z+1)=0$ より，$z^{2n}+z^{2n-1}+\cdots+z+1=0$ は異なる $2n$ 個の虚数解 $\cos\dfrac{2k}{2n+1}\pi+i\sin\dfrac{2k}{2n+1}\pi$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n)$ をもつことになるので，$z^{2n}+z^{2n-1}+\cdots+z+1=0$ の実数解の個数は 0.

第2講　点を回転する

平面上で，異なる2つの直線 l と直線 m が原点で交わっている．α を原点以外の直線 l 上の点，β を原点以外の直線 m 上の点とする．
この2直線上にない点Pを考え，点Pを直線 l に関して対称移動した点をQ，更に点Qを直線 m に関して対称移動した点をRとしたとき，点Pを原点を中心に θ だけ回転したものが点Rになることを示し，θ を α と β を用いて表せ．

【答】 $2(\arg\beta-\arg\alpha)$

【解説】 $\mathrm{P}(z_1)$，$\mathrm{Q}(z_2)$，$\mathrm{R}(z_3)$ とする．

2点PとQは直線 l に関して対称なので，$\dfrac{z_1}{\alpha}$ と $\dfrac{z_2}{\alpha}$ は実軸対称となる．よって

$$\overline{\left(\frac{z_1}{\alpha}\right)}=\frac{z_2}{\alpha}\quad\therefore\ z_2=\frac{\alpha\overline{z_1}}{\overline{\alpha}}\ \cdots①$$

2点QとRも直線 m に関して対称なので，同様に $z_3=\dfrac{\beta\overline{z_2}}{\overline{\beta}}$ …②を得る．

①と②より

$$z_3=\frac{\beta\overline{\left(\dfrac{\alpha\overline{z_1}}{\overline{\alpha}}\right)}}{\overline{\beta}}=\frac{\dfrac{\beta}{\overline{\beta}}}{\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}}}z_1$$

となる．ここで

$$\left|\frac{\dfrac{\beta}{\overline{\beta}}}{\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}}}\right|=1$$

であることと

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{\dfrac{\beta}{\overline{\beta}}}{\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}}}\right)&=(\arg\beta-\arg\overline{\beta})-(\arg\alpha-\arg\overline{\alpha})\\&=2(\arg\beta-\arg\alpha)\end{aligned}$$

なので，点Pを，原点を中心に $2(\arg\beta-\arg\alpha)$ だけ回転したものが点Rとなる．

以上より，$\theta=2(\arg\beta-\arg\alpha)$．

第３講　複素数と円

> p を実数として，複素数平面上の点 a_1，a_2，$\cdots$，a_n を
> $$\begin{cases} a_1=i,\ a_2=1 \\ a_{n+2}+pa_{n+1}-a_n=0 \ (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$
> により定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく．ただし，i は虚数単位とする．
>
> $n=1$，2，$\cdots$ のとき，b_n は中心 $-\dfrac{p}{2}$，半径 $r(>0)$ の円周上にあることを示し，半径 r を求めよ．

【答】 $\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{2}$

【解説】 $a_1=i$，$a_2=1$ より $b_1=\dfrac{1}{i}=-i$ なので

$$\left|b_1-\left(-\frac{p}{2}\right)\right|=\left|\frac{p}{2}-i\right|=\sqrt{\frac{p^2}{4}+1}=\frac{\sqrt{p^2+4}}{2}$$

である．よって $r=\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{2}$ と予想できる．

$$a_{n+2}+pa_{n+1}-a_n=0 \iff \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}+p-\frac{1}{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}=0 \text{ より } b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ なので}$$

$$b_{n+1}+p-\frac{1}{b_n}=0 \qquad \therefore \quad b_{n+1}=\frac{1}{b_n}-p$$

つまり $b_n=\dfrac{1}{b_{n+1}+p}$ …①である．

予想により b_1 は $\left|b_1+\dfrac{p}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{2}$ を満たすので，

$n=k(\geqq 1)$ のとき $\left|b_k+\dfrac{p}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{2}$ を仮定すると，①より

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{b_{k+1}+p}+\frac{p}{2}\right|=\frac{\sqrt{p^2+4}}{2} &\iff \left(\frac{1}{b_{k+1}+p}+\frac{p}{2}\right)\overline{\left(\frac{1}{b_{k+1}+p}+\frac{p}{2}\right)}=\frac{p^2+4}{4} \\
&\iff \left(\frac{1}{b_{k+1}+p}+\frac{p}{2}\right)\left(\frac{1}{\overline{b_{k+1}}+p}+\frac{p}{2}\right)=\frac{p^2+4}{4} \\
&\iff \frac{1}{(b_{k+1}+p)(\overline{b_{k+1}}+p)}+\frac{p}{2}\left(\frac{1}{b_{k+1}+p}+\frac{1}{\overline{b_{k+1}}+p}\right)=1 \\
&\iff 1+\frac{p}{2}(b_{k+1}+p+\overline{b_{k+1}}+p)=(b_{k+1}+p)(\overline{b_{k+1}}+p) \\
&\iff \frac{p^2+4}{4}=\left(b_{k+1}+p-\frac{p}{2}\right)\left(\overline{b_{k+1}}+p-\frac{p}{2}\right) \\
&\iff \left|b_{k+1}+\frac{p}{2}\right|=\frac{\sqrt{p^2+4}}{2}
\end{aligned}$$

なので $n=k+1$ のときにも，中心 $-\dfrac{p}{2}$，半径 $\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{2}$ の円周上にあることが示された．

以上より，求める半径は $\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{2}$.

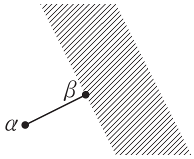
第４講　複素数と領域

α と β は相異なる複素数として

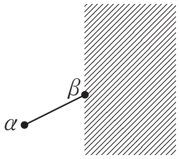
$$1 \leqq \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} \leqq 2$$

を満たすとき z が動く部分の領域を選べ.

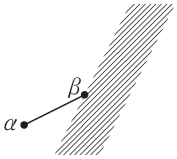
(A)



(B)



(C)



【答】 A

【解説】 $\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ の実部を x としたとき

$$\frac{\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}+\overline{\left(\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}}{2}=x \iff \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}+\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}=2x$$

$$\iff (\overline{\beta}-\overline{\alpha})(z-\alpha)+(\beta-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=2(\beta-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})x \quad \cdots ①$$

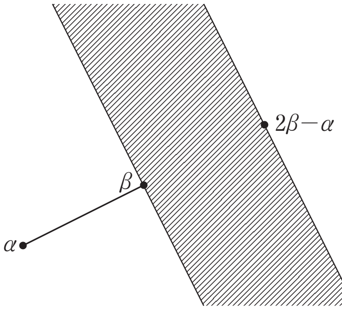
である.

ここで

$$\begin{aligned}
|z-\alpha-2x(\beta-\alpha)|^2 &= |(z-\alpha)-2x(\beta-\alpha)|^2 \\
&= |z-\alpha|^2-2x\{(\overline{\beta}-\overline{\alpha})(z-\alpha)+(\beta-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})\}+4x^2|\beta-\alpha|^2 \\
&= |z-\alpha|^2-2x\cdot 2(\beta-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})x+4x^2|\beta-\alpha|^2 \\
&= |z-\alpha|^2
\end{aligned}$$

より $|z-\alpha-2x(\beta-\alpha)|=|z-\alpha|$ なので，A(α)，C$((1-2x)\alpha+2x\beta)$ とおくと z は線分 AC の垂直二等分線上を動く.

また線分 AC の中点は $(1-x)\alpha+x\beta=\alpha+x(\beta-\alpha)$ で $1 \leqq x \leqq 2$ より，z の動く領域は境界を含む下図斜線部分.



よって，選ぶ領域は A.

第５講　媒介変数で表された曲線

$x=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$，$y=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ で定められる曲線の $y\geqq 0$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

【答】 $\sqrt{3}\pi$

【解説】 $x=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$y=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ より

$$y\geqq 0 \iff 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\geqq 0$$

なので，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ で考える．

$x=2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ より $\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$y=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ より $\dfrac{dy}{d\theta}=2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

なので

θ	$-\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{5}{6}\pi$
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$(x,\ y)$	$(\sqrt{3},\ 0)$	$\nwarrow$	$(-1,\ 2)$	$\swarrow$	$(-2,\ 1)$	$\searrow$	$(-\sqrt{3},\ 0)$

となる．

$dx=(-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)\,d\theta$ であることと，$y=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ のうち，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ の部分を y_1，$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ の部分を y_2 とすると，求める面積は

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{\sqrt{3}} y_1\,dx-\int_{-2}^{-\sqrt{3}} y_2\,dx &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{-\frac{\pi}{6}}(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)(-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)\,d\theta \\
&\quad -\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)(-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(\sqrt{3}+2\sin 2\theta)\,d\theta \\
&= \Big[\sqrt{3}\,\theta-\cos 2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \\
&= \sqrt{3}\pi
\end{aligned}$$

第６講　２次曲線と極座標

a を正の定数とする．極方程式 $r=\dfrac{1}{a-\cos\theta}$ で与えられた曲線が放物線を表すような定数 a を求めよ．

【答】 1

【解説】 $r=\dfrac{1}{a-\cos\theta} \iff ar-r\cos\theta=1$ なので $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$x=r\cos\theta$ を代入すると

$$a\sqrt{x^2+y^2}-x=1 \iff a\sqrt{x^2+y^2}=x+1$$
$$\iff a^2(x^2+y^2)=(x+1)^2 \text{ かつ } x+1\geqq 0$$
$$\iff (a^2-1)x^2+a^2y^2-2x-1=0 \text{ かつ } x+1\geqq 0$$

(Ⅰ)　$a>1$ のとき，$a^2-1>0$ であり

$$(a^2-1)\left(x-\frac{1}{a^2-1}\right)^2+a^2y^2=\frac{a^2}{a^2-1} \text{ かつ } x+1\geqq 0 \text{ より } \frac{\left(x-\frac{1}{a^2-1}\right)^2}{\frac{a^2}{(a^2-1)^2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{a^2-1}}=1$$

となるので，楕円.

(Ⅱ)　$a=1$ のとき，

$y^2-2x-1=0$ かつ $x+1\geqq 0$ より $y^2=4\cdot\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ となるので，放物線.

(Ⅲ)　$0<a<1$ のとき，$a^2-1<0$ であり

(Ⅰ)と同様に $\dfrac{\left(x+\frac{1}{1-a^2}\right)^2}{\frac{a^2}{(1-a^2)^2}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{1-a^2}}=1$ となるので，双曲線.

以上より求める a の値は $a=1$.

第７講　よくある極限

次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x\cos x}{x^3}$$

【答】 $\dfrac{5}{6}$

【解説】 $\dfrac{\tan x-x\cos x}{x^3}=\dfrac{\sin x-x\cos^2 x}{x^3\cos x}=\dfrac{\sin x-x+x\sin^2 x}{x^3\cos x}$

$=\dfrac{1}{\cos x}\left\{\dfrac{\sin x-x}{x^3}+\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\right\}$ である．

ここで $f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$ とおくと $f'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$，$f''(x)=-\sin x+x$，

$f'''(x)=-\cos x+1\geqq 0$ であることと，$f''(0)=0$ より $x<0$ で $f''(x)<0$，$x>0$ で $f''(x)>0$．

これと $f'(0)=0$ より $x<0$ で $f'(x)>0$，$x>0$ で $f'(x)>0$．

更にこれと $f(0)=0$ より $x<0$ で $f(x)<0$，$x>0$ で $f(x)>0$ が示された．

また $g(x)=-\sin x+x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ とおくと，$g'(x)=-\cos x+1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$，

$g''(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}=f(x)$ なので，

これと $g'(0)=0$ より $x<0$ で $g'(x)>0$，$x>0$ で $g'(x)>0$．

これと $g(0)=0$ より $x<0$ で $g(x)<0$，$x>0$ で $g(x)>0$．

以上より $x<0$ で $-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}<\sin x-x<-\dfrac{x^3}{6}$，$x>0$ で

$-\dfrac{x^3}{6}<\sin x-x<-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ なので，いずれの場合も $-\dfrac{1}{6}<\dfrac{\sin x-x}{x^3}<-\dfrac{1}{6}+\dfrac{x^2}{120}$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$．この結果と $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x\cos x}{x^3}=\frac{5}{6}$．

第８講　挟んで極限

> n を 2 以上の自然数として，a を $0<a<1$ を満たす定数とする．x の方程式 $x^n+ax-1=0$ は正の実数解をひとつだけもつことを示し，その実数解を x_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ．

【答】　1

【解説】　$f(x)=x^n+ax-1$ とおくと $f'(x)=nx^{n-1}+a>0$ であり，$f(0)=-1<0$ と $f(1)=a>0$ となるので，$f(x)=0$ は $x>0$ の範囲に実数解を 1 つだけもち，$0<x_n<1$ を満たす．

　このとき

$$x_n{}^n+ax_n-1=0 \iff x_n{}^n=1-ax_n$$

であるが，$0<x_n<1$ より $(0<)1-a<1-ax_n<1$ なので

$$x_n{}^n=1-ax_n \iff n\log x_n=\log(1-ax_n)$$

$$\iff \log x_n=\frac{1}{n}\log(1-ax_n)$$

を得る．

　ここで $\log(1-a)\leqq\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log(1-ax_n)\leqq\log 1(=0)$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-ax_n)=0$．よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log x_n=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$

第9講　ちょっと難あり極限

曲線 C：$y=\log x$ と直線 l：$y=ax+b$ が2点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ で交わっている．ただし，$\mathrm{PQ}=1$，$x_1<x_2$ である．
このとき $\displaystyle\lim_{a\to\infty}a^2(x_2{}^2-x_1{}^2)$ と $\displaystyle\lim_{a\to+0}a(x_2{}^2-x_1{}^2)$ をそれぞれ求めよ．

【答】　順に $\dfrac{e+1}{e-1}$，2

【解説】　直線PQの傾きが a より $y_2-y_1=a(x_2-x_1)$ であることと $\mathrm{PQ}=1$ より
$(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2=1$ なので

$a^2(x_2-x_1)^2+(x_2-x_1)^2=1$．$x_2>x_1$ より $x_2-x_1=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ …①

　よって $y_2-y_1=a(x_2-x_1)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$．

　また $y_2=\log x_2$ と $y_1=\log x_1$ より $y_2-y_1=\log\dfrac{x_2}{x_1}$ なので

$\log\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$　∴　$\dfrac{x_2}{x_1}=e^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}$ …②

　①と②より $x_2=\dfrac{e^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}}{\sqrt{a^2+1}\,\left(e^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}-1\right)}$，$x_1=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}\,\left(e^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}-1\right)}$，つまり

$x_2+x_1=\dfrac{e^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}+1}{\sqrt{a^2+1}\,\left(e^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}-1\right)}$ を得るので，この結果と①より

$x_2{}^2-x_1{}^2=\dfrac{e^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}+1}{(a^2+1)\left(e^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}-1\right)}$ となる．

　よって

$$\lim_{a\to\infty}a^2(x_2{}^2-x_1{}^2)=\lim_{a\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}}}+1}{\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(e^{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}}}-1\right)}=\frac{e+1}{e-1},$$

$$\lim_{a\to+0}a(x_2{}^2-x_1{}^2)=\lim_{a\to+0}\frac{e^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}+1}{\sqrt{a^2+1}\cdot\dfrac{e^{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}-1}{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}}=2$$

第 10 講　一般項を求めないで極限

$a_1=\dfrac{3}{2}$，$a_{n+1}=3\log_4(a_n+1)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ に関して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

【答】 3

【解説】 $a_1=\dfrac{3}{2}$ であることと $a_{n+1}=3\log_4(a_n+1)$ より帰納的に $\dfrac{3}{2}\leqq a_n<3$ である．

ここで $x\geqq\dfrac{3}{2}$ のとき $f(x)=3\log_4(x+1)-x$ とおくと，

$f'(x)=\dfrac{3}{(\log 4)(x+1)}-1=\dfrac{-(\log 4)x+3-\log 4}{(\log 4)(x+1)}$ であり，

$(\log 4)(x+1)\geqq(\log 4)\left(\dfrac{3}{2}+1\right)=\log 32$ であるが，$e<3$ より $e^3<27<32$ なので

$(\log 4)(x+1)>3$ となることより，$f'(x)<0$.

この結果と $f(3)=0$ より，$f(x)=0$ は $x\geqq\dfrac{3}{2}$ の範囲に実数解を 1 つだけもち，それは 3 であることがわかる．

ここで $g(x)=3\log_4(x+1)$ とおくと

$$\begin{aligned} a_{n+1}-3 &= g(a_n)-3 \\ &= g(a_n)-g(3) \end{aligned}$$

であるが，$g(x)$ は $a_n\leqq x\leqq 3$ で連続，$a_n<x<3$ で微分可能なので，平均値の定理より

$$\frac{g(a_n)-g(3)}{a_n-3}=g'(\alpha)\ \text{かつ}\ a_n<\alpha<3$$

を満たす α が少なくとも 1 つ存在する．

このとき $g'(\alpha)=\dfrac{3}{(\log 4)(\alpha+1)}$，$\left(\dfrac{3}{2}\leqq\right)a_n<\alpha<3$ より，$0<g'(\alpha)<\dfrac{3}{\log 32}\ (<1)$ であることより

$$\begin{aligned} |g(a_n)-g(3)| &= |g'(\alpha)||a_n-3| \\ &\leqq \frac{3}{\log 32}|a_n-3| \end{aligned}$$

となるので，$|a_{n+1}-3|\leqq\dfrac{3}{\log 32}|a_n-3|$ を得る．ゆえに $|a_n-3|\leqq|a_1-3|\left(\dfrac{3}{\log 32}\right)^{n-1}$.

ここで $\left(\dfrac{3}{\log 32}\right)^{n-1}\to 0\ (n\to\infty)$ より $|a_n-3|\to 0\ (n\to\infty)$．よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3$.

第 11 講　無限級数

正の数からなる数列 $\{a_n\}$ が，条件

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2=n^3$$

を満たしている．

このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^2}$ を求めよ．

【答】 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解説】 $(a_1)^2=1^3$ で $a_1>0$ より $a_1=1$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}(a_n)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(a_k)^2-\sum_{k=1}^{n-1}(a_k)^2\\ &= n^3-(n-1)^3\\ &= 3n^2-3n+1\ \text{（これは } n=1 \text{ のときにも成り立つ）}\end{aligned}$$

このことと $a_n>0$ より $a_n=\sqrt{3n^2-3n+1}$ を得る．

ここで，$g(x)=\sqrt{3x^2-3x+1}$ とおくと $g'(x)=\dfrac{6\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{3x^2-3x+1}}$ なので，$x\geqq 1$ で $g(x)$ は増加関数であり，$g(0)=g(1)$ である．

k を 1 以上の自然数とするとき，$k\leqq x\leqq k+1$ において $g(k)\leqq g(x)\leqq g(k+1)$ が成り立つので

$$\int_k^{k+1}g(k)\,dx\leqq\int_k^{k+1}g(x)\,dx\leqq\int_k^{k+1}g(k+1)\,dx \text{ つまり } g(k)\leqq\int_k^{k+1}g(x)\,dx\leqq g(k+1)$$

が成立する．$k=1$，2，…，$n-1$ を代入して，和をとることで

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\leqq\int_1^n g(x)\,dx\leqq a_2+a_3+\cdots+a_n$$

つまり $\displaystyle\int_1^n g(x)\,dx+a_1\leqq a_1+a_2+\cdots+a_n\leqq\int_1^n g(x)\,dx+a_n$ …①を得る．

このとき

$$\begin{aligned}\int_1^n g(x)\,dx &> \int_1^n\sqrt{3x^2-6x+3}\,dx=\int_1^n\sqrt{3}\,(x-1)\,dx=\left[\sqrt{3}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right]_1^n\\ &=\sqrt{3}\left(\frac{n^2}{2}-n\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\int_1^n g(x)\,dx < \int_1^n\sqrt{3x^2}\,dx=\int_1^n\sqrt{3}\,x\,dx=\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\right]_1^n=\frac{\sqrt{3}}{2}n^2-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるので，この結果と①より

$$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{n}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\frac{1}{n^2}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^2}<\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2n^2}+\frac{1}{n}\sqrt{3-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

第 12 講　微分について

連続な導関数をもつ関数 $f(x)$ について，任意の実数 x，y に対して
$f(x+y)=f(x)+f(y)$，$f'(x) \fallingdotseq 0$ を満たすとする．

(1)　$f(0)$ を求めよ．

(2)　$\dfrac{f'(x)}{f'(0)}$ を求めよ．

(3)　$f'(0)=2$ として $f(x)$ を求めよ．

【答】　(1)　0　　(2)　1　　(3)　$2x$

【解説】　(1)　$f(x+y)=f(x)+f(y)$ に $x=y=0$ を代入することで $f(0)=2f(0)$ となる．
よって $f(0)=0$．

(2)　$f(0)=0$ より $f(x+y)=f(x)+f(y) \iff f(x+y)-f(x)=f(y)-f(0)$ と変形できる．
ここで，0 でない y で両辺を割ると

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)-f(0)}{y}$$

$y \to 0$ によって $f'(x)=f'(0)$ を得る．よって $\dfrac{f'(x)}{f'(0)}=1$．

(3)　(2)の結果と $f'(0)=2$ より $f'(x)=2$ なので，定数 C を用いて $f(x)=2x+C$ と表せる．
ここで(1)の結果より $f(0)=0$ なので $C=0$．よって $f(x)=2x$．

第13講　接線といえば

> $f(x)=x^2-5$ とする．
>
> $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ を考えて $\sqrt{5}$ の小数第2位を求めよ．

【答】 3

【解説】 $f(x)=x^2-5$ より $f'(x)=2x$ なので

$$a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}=a_n-\frac{{a_n}^2-5}{2a_n}=\frac{1}{2}a_n+\frac{5}{2a_n}$$

となる．

よって

$$\begin{aligned} a_{n+1}-\sqrt{5} &= \frac{1}{2}a_n+\frac{5}{2a_n}-\sqrt{5} \\ &= \frac{{a_n}^2+5-2\sqrt{5}\,a_n}{2a_n} \\ &= \frac{(a_n-\sqrt{5})^2}{2a_n} \end{aligned}$$

であることと，$\sqrt{5}<\sqrt{9}=a_1$ より帰納的に $a_n>\sqrt{5}$ である．

このとき $a_{n+1}=a_n-\dfrac{{a_n}^2-5}{2a_n}$ より帰納的に $a_n\leqq 3$ であることもわかる．

ここで $a_{n+1}-\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\sqrt{5}}{a_n}\right)(a_n-\sqrt{5})$ であり，$\sqrt{5}<a_n\leqq 3$ より

$0<\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\sqrt{5}}{a_n}\right)\leqq\dfrac{3-\sqrt{5}}{6}$ となるが，$\dfrac{1}{7}-\dfrac{3-\sqrt{5}}{6}=\dfrac{\sqrt{5}}{42}(\sqrt{49}-\sqrt{45})>0$ より

$\dfrac{3-\sqrt{5}}{6}<\dfrac{1}{7}$ なので，$a_{n+1}-\sqrt{5}<\dfrac{1}{7}(a_n-\sqrt{5})$ を得る．

よって $a_n-\sqrt{5}<(a_1-\sqrt{5})\left(\dfrac{1}{7}\right)^{n-1}$ である．

ここで

$$(0<)a_4-\sqrt{5}<(a_1-\sqrt{5})\left(\frac{1}{7}\right)^3<\frac{1}{7^3}=0.0029\cdots$$

であり

$a_1=3$，$a_2=\dfrac{1}{2}a_1+\dfrac{5}{2a_1}=\dfrac{7}{3}$，$a_3=\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{5}{2a_2}=\dfrac{47}{21}$，$a_4=\dfrac{1}{2}a_3+\dfrac{5}{2a_3}=\dfrac{2207}{987}=2.2360\cdots$

なので

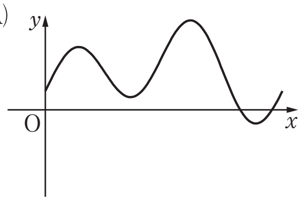
$$a_4-\frac{1}{7^3}<\sqrt{5}<a_4 \text{ つまり } 2.2331\cdots<\sqrt{5}<2.2360\cdots$$

となるので，$\sqrt{5}$ の小数第2位の数字は3．

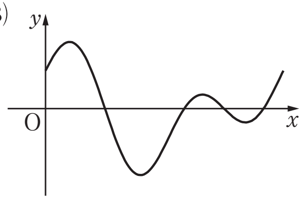
第14講　グラフを描く

$y=\cos x+3\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ のグラフを以下から選べ.

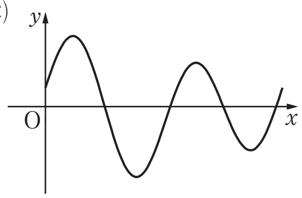
(A)



(B)



(C)



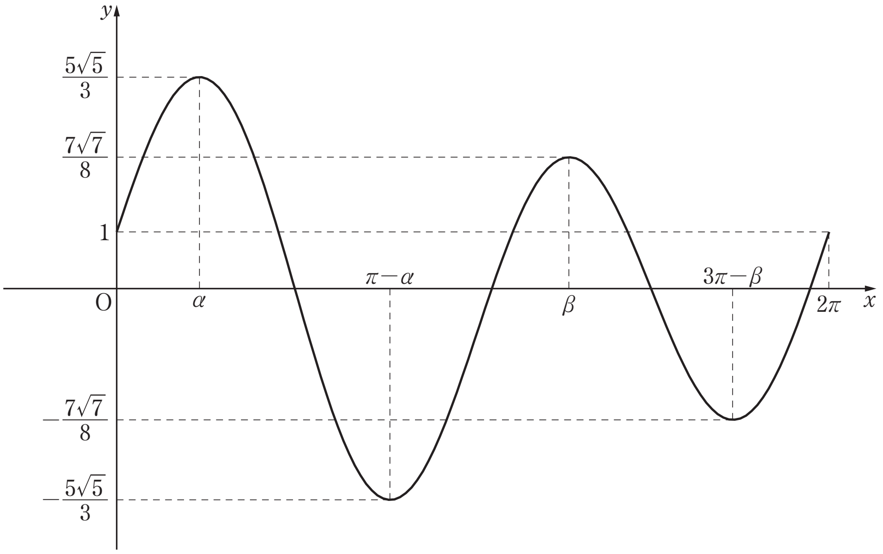
【答】 C

【解説】 $y'=-\sin x+6\cos 2x=6-\sin x-12\sin^2 x$ なので

$y'=-(4\sin x+3)(3\sin x-2)$ より，$\sin x=\dfrac{2}{3}$ かつ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin x=-\dfrac{3}{4}$ かつ

$\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$ をみたす x を順に α，β とすると

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	β	$\cdots$	$3\pi-\beta$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	$\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$	↘	$-\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$	↗	$\dfrac{7\sqrt{7}}{8}$	↘	$-\dfrac{7\sqrt{7}}{8}$	↗	1



第15講　ちょっと訳あり増減

> $C_1 : y=e^{x-1}$ $(x \geqq 0)$ 上の点をP，$C_2 : y=-x^2+5x-6$ 上の点をQとするとき，PQの最小値を求めよ．

【答】 $\sqrt{2}$

【解説】 $\mathrm{P}(t,\ e^{t-1})$，$\mathrm{Q}(u,\ -u^2+5u-6)$ とおく．ただし，$t \geqq 0$ である．

$\mathrm{PQ}^2=(u-t)^2+(-u^2+5u-6-e^{t-1})^2$ なので，これを $f(u)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(u) &= 2(u-t)+2(-u^2+5u-6-e^{t-1})(-2u+5) \\ &= 4u^3-30u^2+4(e^{t-1}+19)u-2(5e^{t-1}+t+30), \\ f''(u) &= 12u^2-60u+4(e^{t-1}+19) \\ &= 12\left(u-\frac{5}{2}\right)^2+4e^{t-1}+1>0 \end{aligned}$$

なので $f'(u)=0$ は実数解をただ1つだけもち，それを u_0 とおくと，u_0 は

$$\begin{aligned} & 2(u_0-t)+2(-u_0{}^2+5u_0-6-e^{t-1})(-2u_0+5)=0 \\ \iff\ & u_0-t=(-u_0{}^2+5u_0-6-e^{t-1})(2u_0-5)\ \cdots ① \end{aligned}$$

を満たす．

また $(u_0-t)^2+(-u_0{}^2+5u_0-6-e^{t-1})^2=g(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2(u_0-t)\cdot(-1)+2(-u_0{}^2+5u_0-6-e^{t-1})\cdot(-e^{t-1}) \\ &= 2(e^{t-1}+u_0{}^2-5u_0+6)(e^{t-1}-5+2u_0)\ (\because\ ①) \end{aligned}$$

ここで，$t>0$ より $e^{t-1}>\dfrac{1}{e}>\dfrac{1}{3}$，$u_0{}^2-5u_0+6=\left(u_0-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4} \geqq -\dfrac{1}{4}$ なので

$e^{t-1}+u_0{}^2-5u_0+6>0$ である．

(Ⅰ) $u_0 \geqq \dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2e}$ のとき，$t \geqq 0$ において $e^{t-1}-5+2u_0 \geqq 0$，つまり $g'(t) \geqq 0$ なので，$t=0$ のとき $g(t)$ は最小値 $u_0{}^2+\left(-u_0{}^2+5u_0-6-\dfrac{1}{e}\right)^2$ となるが，$u_0 \geqq \dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2e}>2$ なので，この値は4以上となる．

(Ⅱ) $u_0<\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2e}$ のとき，

t	0	$\cdots$	$1+\log(5-2u_0)$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘		↗

となるので $t=1+\log(5-2u_0) \iff e^{t-1}=5-2u_0$ のとき，$g(t)$ は最小となる．

これを①に代入して，改めて u_0 を u とおくと

$$\begin{aligned} & u-\{1+\log(5-2u)\}=\{-u^2+5u-6-(5-2u)\}(2u-5) \\ \iff\ & 2u^3-19u^2+58u-56-\log(5-2u)=0 \end{aligned}$$

である．$h(u)=2u^3-19u^2+58u-56-\log(5-2u)$ とおくと

$h'(u)=6u^2-38u+58-\dfrac{2}{2u-5}$ となるが，

$u<\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2e}$ のとき，$-\dfrac{2}{2u-5}>0$，$6u^2-38u+58=6\left(u-\dfrac{19}{6}\right)^2-\dfrac{13}{6}$ なので

$6u^2-38u+58>6\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-38\cdot\dfrac{5}{2}+58=\dfrac{1}{2}$ より $h'(u)>0$．この結果と $h(2)=0$ より，①と

$e^{t-1}=5-2u_0$ を同時に満たす t と u_0 は $t=1$，$u_0=2$．このとき P(1，1) と Q(2，0) より

$PQ^2=2$．

(Ⅰ)，(Ⅱ)より PQ の最小値は $\sqrt{2}$．

第16講　微分でやっておきたいこと

$x>0$ のとき
$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$
であることを示し，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{b^2\log(b+a)-b^2\log b-ab}{a^2}$ の値を求めよ．ただし，b は正の定数とする．

【答】 $-\dfrac{1}{2}$

【解説】 $f(x)=\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{x^2}{1+x}>0$ であることと $f(0)=0$ より，$x>0$ において $f(x)>0$.

また $g(x)=\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)-\log(1+x)$ とおくと，

$g'(x)=1-x+x^2-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x^3}{1+x}>0$ であることと $g(0)=0$ より，$x>0$ において $g(x)>0$.

以上より，$x>0$ のとき，$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ は示された．

また
$$\begin{aligned}\frac{b^2\log(b+a)-b^2\log b-ab}{a^2} &= b^2\times\frac{\log(b+a)-\log b-\dfrac{a}{b}}{a^2}\\ &= \frac{\log\left(1+\dfrac{a}{b}\right)-\dfrac{a}{b}}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}\end{aligned}$$

より $\dfrac{a}{b}=x$ とおくと $a\to+0$ のとき $x\to+0$ なので
$$\lim_{a\to+0}\frac{b^2\log(b+a)-b^2\log b-ab}{a^2}=\lim_{x\to+0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$$
である．

ここで
$$\begin{aligned}x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3} &\iff -\frac{x^2}{2}<\log(1+x)-x<-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\\ &\iff -\frac{1}{2}<\frac{\log(1+x)-x}{x^2}<-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\end{aligned}$$

なので $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$．よって $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{b^2\log(b+a)-b^2\log b-ab}{a^2}=-\frac{1}{2}$.

第17講　落とせない積分計算

次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\cos^3 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos^4 x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx$

【答】 (1) $\dfrac{1}{40}$　(2) $\dfrac{3}{256}\pi$　(3) $\dfrac{8}{15}$

【解説】 (1) $\sin x=t$ と置換すると，$\cos x\,dx=dt$ などより

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\cos^3 x\,dx &= \int_0^1 t^7(1-t^2)\,dt\\ &= \int_0^1 (t^7-t^9)\,dt\\ &= \left[\frac{t^8}{8}-\frac{t^{10}}{10}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{40}\end{aligned}$$

(2) $\sin^4 x\cos^4 x=\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)^4=\dfrac{1}{16}(\sin^2 2x)^2=\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1-\cos 4x}{2}\right)^2$

$=\dfrac{1}{64}(1-2\cos 4x+\cos^2 4x)=\dfrac{1}{64}\left(1-2\cos 4x+\dfrac{1+\cos 8x}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{128}(3-4\cos 4x+\cos 8x)$ となるので

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos^4 x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{128}(3-4\cos 4x+\cos 8x)\,dx\\ &= \left[\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{3}{256}\pi\end{aligned}$$

(3) $\cos x=t$ と置換すると，$-\sin x\,dx=dt$ などより

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx &= \int_1^0 (-\sin^4 x)\,dt\\ &= \int_0^1 (1-t^2)^2\,dt\\ &= \int_0^1 (1-2t^2+t^4)\,dt\\ &= \left[t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right]_0^1\\ &= \frac{8}{15}\end{aligned}$$

第 18 講　積分と漸化式

n を自然数として，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx,\ J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx,\ K_n=\int_1^e(\log x)^n dx,\ L_n=\int_0^1 x^n e^x dx$$

とする．

$$I_n=\alpha J_n,\ K_n=\beta L_n$$

がすべての n について成立するとき，実数 α と β の値を求めよ．

また I_3+K_3 の値を求めよ．

【答】 $\alpha=1,\ \beta=1,\ I_3+K_3=\dfrac{20}{3}-2e$

【解説】 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ と置換積分すると

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt=I_n \text{ より } \alpha=1.$$

また，$\log x=t$ と置換積分すると，$e^t=x$ より $e^t=\dfrac{dx}{dt}$ なので

$$K_n=\int_1^e(\log x)^n dx=\int_0^1 t^n e^t dt=L_n \text{ より } \beta=1.$$

ここで

$$\begin{aligned}(n+2)I_{n+2}-(n+1)I_n &= (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,dx-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\{(n+2)\sin^{n+2}x-(n+1)\sin^n x\}\,dx\\ &= \Big[-\sin^{n+1}x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

より $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$ であり

$$\begin{aligned}K_{n+1}+(n+1)K_n &= \int_0^1 x^{n+1}e^x dx+(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx\\ &= \int_0^1\{x^{n+1}e^x+(n+1)x^n e^x\}\,dx\\ &= \Big[x^{n+1}e^x\Big]_0^1\\ &= e\end{aligned}$$

より $K_{n+1}=e-(n+1)K_n$ なので

$$\begin{aligned}
I_3+K_3 &= I_3+(e-3K_2)\\
&= \frac{2}{3}I_1+\{e-3(e-2K_1)\}\\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx+6\int_0^1 xe^x\,dx-2e\\
&= \frac{2}{3}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+6\Big[(x-1)e^x\Big]_0^1-2e\\
&= \frac{20}{3}-2e
\end{aligned}$$

第 19 講　実数解条件と体積

a を 0 以上の実数として，xy 座標平面上の領域

$$x^2+(y-a)^2\leqq 1 \text{ かつ } y\geqq 0$$

D を考える．ただし，a は 0 以上の実数とする．
D を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(a)$ とする．
$V(a)=2\pi^2$ となる a の値を求めよ．

【答】 1

【解説】 $x^2+(y-a)^2\leqq 1$ より，$1-x^2\geqq 0 \iff -1\leqq x\leqq 1$ という条件のもとで
$a-\sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq a+\sqrt{1-x^2}$ である．

ここで不等式 $a-\sqrt{1-x^2}<0 \iff \sqrt{1-x^2}>a$ の実数解は，

$$\begin{cases} \text{解なし} & (a\geqq 1 \text{ のとき}) \\ -\sqrt{1-a^2}<x<\sqrt{1-a^2} & (0\leqq a<1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{となる．}$$

よって $x^2+(y-a)^2\leqq 1$ かつ $y\geqq 0$ を y の不等式とみたときの実数解は

$$\begin{cases} a-\sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq a+\sqrt{1-x^2} & (a\geqq 1 \text{ のとき}) \\ 0\leqq y\leqq a+\sqrt{1-x^2} & \left(0\leqq a<1 \text{ かつ } -\sqrt{1-a^2}<x<\sqrt{1-a^2} \text{ のとき}\right) \\ a-\sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq a+\sqrt{1-x^2} & \left(0\leqq a<1 \text{ かつ } x\leqq -\sqrt{1-a^2},\ \sqrt{1-a^2}\leqq x \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

となる．

$a\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} V(a) &= \int_{-1}^{1}\pi\left(a+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx-\int_{-1}^{1}\pi\left(a-\sqrt{1-x^2}\right)^2dx \\ &= 8a\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= 8a\pi\times\frac{\pi}{4} \\ &= 2\pi^2a \end{aligned}$$

より $V(a)\geqq 2\pi^2$ となる．

$0\leqq a<1$ のとき，$\sin\alpha=a$ かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 α を用いて $\beta=\cos\alpha$ とおくと

$$\begin{aligned} V(a) &= \int_{-1}^{1}\pi\left(a+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx-\int_{-1}^{-\beta}\pi\left(a-\sqrt{1-x^2}\right)^2dx-\int_{\beta}^{1}\pi\left(a-\sqrt{1-x^2}\right)^2dx \\ &= 2\pi\left\{\int_0^1\left(a+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx-\int_\beta^1\left(a-\sqrt{1-x^2}\right)^2dx\right\} \\ &= 2\pi\left\{\int_0^\beta\left(a^2+1-x^2+2a\sqrt{1-x^2}\right)dx+4a\int_\beta^1\sqrt{1-x^2}\,dx\right\} \\ &= 2\pi\left\{\left[(a^2+1)x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^\beta+2a\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\frac{1}{2}a\beta\right\}+4a\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}a\beta\right)\right\} \\ &= 2\pi\left(\beta-\frac{1}{3}\beta^3+\frac{\pi}{2}a+a\alpha\right) \\ &= 2\pi\left(\cos\alpha-\frac{1}{3}\cos^3\alpha+\frac{\pi}{2}\sin\alpha+\alpha\sin\alpha\right) \end{aligned}$$

より $\dfrac{d}{d\alpha}V(a)=2\pi\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha+\alpha\cos\alpha\right)$ と $\dfrac{da}{d\alpha}=\cos\alpha$ つまり $\dfrac{d\alpha}{da}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$ より，

　$V'(a)=2\pi\left(\dfrac{\pi}{2}+\sin\alpha\cos\alpha+\alpha\right)>0$ となり，$0\leqq a<1$ なので $V(a)<V(1)=2\pi^2$ となる．

　以上より，求める a の値は $a=1$．

第 20 講　斜回転体の体積

$C: y=\sin x\ \left(0\leqq x\leqq \frac{5}{6}\pi\right)$ と $l: y=\frac{3}{5\pi}x$ によって囲まれる部分を D とする．
D を直線 l のまわりに回転して得られる立体の体積 V を求めよ．

【答】 $\dfrac{\pi\left(175\pi^2-135\sqrt{3}\,\pi-216\right)}{72\sqrt{25\pi^2+9}}$

【解説】 $\mathrm{A}\left(\frac{5}{6}\pi,\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{P}\left(t,\ \frac{3}{5\pi}t\right)$ $\left(0<t<\frac{5}{6}\pi\right)$ として，P を通り l に垂直な直線と C との交点を Q，Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点を $\mathrm{H}(u,\ 0)$ とし，QH と l の交点を R とする．

また θ を $\dfrac{5\pi}{\sqrt{25\pi^2+9}}=\cos\theta$ かつ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．

このとき $V=\displaystyle\int_0^{\mathrm{OA}}\pi\mathrm{PQ}^2d\mathrm{OP}$ である．

ここで，$\mathrm{OP}=\dfrac{1}{\cos\theta}\mathrm{OH}+\sin\theta\cdot\mathrm{QR}=\dfrac{1}{\cos\theta}u+\sin\theta\left(\sin u-\dfrac{3}{5\pi}u\right)$，

$\mathrm{PQ}=\cos\theta\cdot\mathrm{QR}=\cos\theta\left(\sin u-\dfrac{3}{5\pi}u\right)$ であり

$d\mathrm{OP}=\left\{\dfrac{1}{\cos\theta}+\sin\theta\left(\cos u-\dfrac{3}{5\pi}\right)\right\}du$，$\mathrm{OP}=\mathrm{OA}$ のとき $u=\dfrac{5}{6}\pi$，$\mathrm{OP}=0$ のとき $u=0$

なので

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\mathrm{OA}}\pi\mathrm{PQ}^2d\mathrm{OP}\\
&= \int_0^{\frac{5}{6}\pi}\pi\left\{\cos\theta\left(\sin u-\frac{3}{5\pi}u\right)\right\}^2\left\{\frac{1}{\cos\theta}+\sin\theta\left(\cos u-\frac{3}{5\pi}\right)\right\}du\\
&= \cos\theta\int_0^{\frac{5}{6}\pi}\pi\left(\sin u-\frac{3}{5\pi}u\right)^2du+\cos^2\theta\sin\theta\int_0^{\frac{5}{6}\pi}\pi\left(\sin u-\frac{3}{5\pi}u\right)^2\left(\cos u-\frac{3}{5\pi}\right)du\\
&= \cos\theta\int_0^{\frac{5}{6}\pi}\pi\left(\sin^2u-\frac{6}{5\pi}u\sin u+\frac{9}{25\pi^2}u^2\right)du+\pi\cos^2\theta\sin\theta\left[\frac{1}{3}\left(\sin u-\frac{3}{5\pi}u\right)^3\right]_0^{\frac{5}{6}\pi}\\
&= \cos\theta\int_0^{\frac{5}{6}\pi}\pi\left(\frac{1-\cos 2u}{2}-\frac{6}{5\pi}u\sin u+\frac{9}{25\pi^2}u^2\right)du+\pi\cos^2\theta\sin\theta\times 0\\
&= \pi\cos\theta\left[\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}\sin 2u\right)-\frac{6}{5\pi}(-u\cos u+\sin u)+\frac{3}{25\pi^2}u^3\right]_0^{\frac{5}{6}\pi}\\
&= \pi\cos\theta\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\frac{6}{5\pi}\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{72}\pi\right\}\\
&= \frac{\pi\left(175\pi^2-135\sqrt{3}\,\pi-216\right)}{72\sqrt{25\pi^2+9}}
\end{aligned}
$$

第 21 講　体積は切る！

K_1：$x \geqq 0$ かつ $z \geqq 0$ かつ $2x+3z \leqq 6$，K_2：$y \geqq 0$ かつ $z \geqq 0$ かつ $3y+4z \leqq 12$ とする．
K_1 と K_2 の共通部分の体積 V を求めよ．

【答】 $\dfrac{28}{3}$

【解説】 K_1 と K_2 の共通部分を $z=t$ で切った切り口は

$(x \geqq 0$ かつ $t \geqq 0$ かつ $2x+3t \leqq 6)$ かつ $(y \geqq 0$ かつ $t \geqq 0$ かつ $3y+4t \leqq 12)$

$\Longleftrightarrow$ $0 \leqq x \leqq \dfrac{6-3t}{2}$ かつ $0 \leqq y \leqq \dfrac{12-4t}{3}$ かつ $t \geqq 0$ かつ $\dfrac{6-3t}{2} \geqq 0$ かつ $\dfrac{12-4t}{3} \geqq 0$

$\Longleftrightarrow$ $0 \leqq x \leqq \dfrac{6-3t}{2}$ かつ $0 \leqq y \leqq \dfrac{12-4t}{3}$ かつ $0 \leqq t \leqq 2$

となるので，

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 \frac{6-3t}{2} \times \frac{12-4t}{3}\,dt \\
&= \int_0^2 2(2-t)(3-t)\,dt \\
&= \int_0^2 2\left\{(t-2)^2-(t-2)\right\}dt \\
&= \left[\frac{2}{3}(t-2)^3-(t-2)^2\right]_0^2 \\
&= \frac{28}{3}
\end{aligned}
$$

第22講　微分方程式

任意の実数 x に対して

$$f(x)=\sin 2x+\int_0^x f(x-u)\sin u\,du$$

を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ．

【答】 $\dfrac{3}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{2}x$

【解説】 $x-u=t$ と置換積分すると，$u=x-t$，$du=-dt$ より

$f(x)=\sin 2x+\displaystyle\int_x^0 f(t)\sin(x-t)(-dt)$，つまり

$f(x)=\sin 2x+\sin x\displaystyle\int_0^x f(t)\cos t\,dt-\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$ となる．ここで $f(0)=0$ であり

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos 2x+\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt+\sin x\cdot f(x)\cos x \\ &\quad +\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt-\cos x\cdot f(x)\sin x \\ &= 2\cos 2x+\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt+\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt \end{aligned}$$

となるので，$f'(0)=2$ であり，更に x で微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4\sin 2x-\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt+\cos x\cdot f(x)\cos x \\ &\quad +\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt+\sin x\cdot f(x)\sin x \\ &= -4\sin 2x-\left\{\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt-\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt\right\}+f(x) \\ &= -4\sin 2x-(f(x)-\sin 2x)+f(x) \\ &= -3\sin 2x \end{aligned}$$

この結果と $f'(0)=2$ より $f'(x)=\dfrac{3}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}$．これと $f(0)=0$ より

$f(x)=\dfrac{3}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{2}x.$

第23講　積分でやっておきたいこと（その1）

以下の空欄に適切な数値や記号を入れよ．

n を0以上の自然数として，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)^n\cos x\,dx$ とするとき，$I_0=$ **あ** ，$I_1=$ **い** であり，$I_{n+1}=2(2n+$ **う** $)(n+$ **え** $)I_n-n(n+$ **お** $)\pi^2I_{n-1}$ を満たす．

このとき π が有理数 $\frac{p}{q}$（p，q は自然数で互いに素）であると仮定して $J_n=\frac{q^n}{n!}I_n$ とおくとき，矛盾が生じる理由として最も適切なものを以下の3つから選ぶと **か** である．

(A)　J_n は自然数であるが，$\lim_{n\to\infty}J_n=1$ となること．

(B)　J_n は自然数であるが，$\lim_{n\to\infty}J_n=\infty$ となること．

(C)　J_n は自然数であるが，$\lim_{n\to\infty}J_n=0$ となること．

【答】 **あ** $=1$，**い** $=2$，**う** $=1$，**え** $=1$，**お** $=1$，**か** $=$C

【解説】 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$　… **あ** であり，

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)\cos x\,dx=\left[\frac{\pi^2}{4}\sin x-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\quad\cdots\ \text{い}$$

である．また

$$\begin{aligned}
I_{n+1}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)^{n+1}\cos x\,dx\\
&=\left[\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)^{n+1}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+1)\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)^n\cdot(-2x)\times\sin x\,dx\\
&=(n+1)\left[\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)^n\cdot(-2x)\times\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&\qquad-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{n\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)^{n-1}\cdot(-2x)^2+\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)^n\cdot(-2)\right\}\cos x\,dx\\
&=-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[n\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)^{n-1}\cdot4\cdot\left\{\frac{\pi^2}{4}-\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)\right\}\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)^n\cdot(-2)\right]\cos x\,dx\\
&=(n+1)\{(4n+2)I_n-n\pi^2I_{n-1}\}\\
&=2(2n+1)(n+1)I_n-n(n+1)\pi^2I_{n-1}\quad\cdots\ \text{う}\ \text{え}\ \text{お}
\end{aligned}$$

このとき π が有理数 $\frac{p}{q}$（p，q は自然数で互いに素）であると仮定して $J_n=\frac{q^n}{n!}I_n$ とおくとき，

$$I_{n+1}=2(2n+1)(n+1)I_n-n(n+1)\left(\frac{p}{q}\right)^2I_{n-1}$$

$$\iff\quad J_{n+1}=2(2n+1)qJ_n-p^2J_{n-1}$$

となるが，これと $J_0=\dfrac{q^0}{0!}I_0=1$，$J_1=\dfrac{q^1}{1!}I_1=2q$，$J_n>0$ であることより，帰納的に J_n は自然数となる．

　このとき $J_n=\dfrac{q^n}{n!}\left|\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi^2}{4}-x^2\right)^n\cos x\,dx\right|\leqq\dfrac{q^n}{n!}\cdot\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\pi^2}{4}\right)^n$ となるが，$\dfrac{q\pi^2}{4}$ 以下の最大整数を M とすると十分大きな n に対して

$J_n\leqq\dfrac{q^n}{n!}\cdot\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\pi^2}{4}\right)^n\leqq\dfrac{\pi}{2\cdot M!}\left(\dfrac{q\pi^2}{4}\right)^M\left\{\dfrac{q\pi^2}{4(M+1)}\right\}^{n-M}\to 0$ $(n\to\infty)$ となるので，J_n は自然数であることに矛盾．よって π は無理数．

　以上より，**か** は C.

第 24 講　積分でやっておきたいこと（その２）

実数 t が $1<t<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，

関数 $f(t)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|x-t\sin x|\,dx$ の最小値を求めよ．

【答】 $\dfrac{\pi^2}{72}$

【解説】 $g(x)=x-t\sin x$ とおくと，$g'(x)=1-t\cos x$ より $\cos x=\dfrac{1}{t}$ かつ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数を β とすると

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘		↗	$\dfrac{\pi}{2}-t$

となり，$\dfrac{\pi}{2}-t>0$ より $g(x)=0$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に実数解を１つだけもつので，それを α とおくと，$\alpha=t\sin\alpha$ かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす．このとき

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}|x-t\sin x|\,dx \\
&= \int_0^{\alpha}(-x+t\sin x)\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(x-t\sin x)\,dx \\
&= \left[-\frac{x^2}{2}-t\cos x\right]_0^{\alpha}+\left[\frac{x^2}{2}+t\cos x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\alpha^2+t(1-2\cos\alpha)+\frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}
$$

となるので，$\alpha=t\sin\alpha$ より，

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= -2\alpha\times\frac{d\alpha}{dt}+1(1-2\cos\alpha)+t(2\sin\alpha)\times\frac{d\alpha}{dt} \\
&= 1-2\cos\alpha+2(-\alpha+t\sin\alpha)\times\frac{d\alpha}{dt} \\
&= 1-2\cos\alpha
\end{aligned}
$$

ここで，

$f'(t)>0 \iff 1-2\cos\alpha>0 \iff \dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{2} \iff \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi<t<\dfrac{\pi}{2}$ となることより，

$f(t)$ の増減は

t	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

となる．よって求める最小値は，$-\left(\frac{\pi}{3}\right)^2+0+\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{72}$